Jensenova nerovnosť

Ján Gunčaga

ZUSAMMENFASSUNG: *Dieser Beitrag beschreibt die Benutzung der Ungleichung von Jensen bei der Lösung einigen Extremalaufgaben. Diese Ungleichung formulierte J. L. W. V. Jensen in seinem Beitrag „Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes“ (Sehe [6]). Im Beitrag sind die Lösungen der konkreten Beispielen gezeigt, die konvexen und konkaven Funktionen benutzen. Deshalb kann man die Maximum- und Minimumwerte der Funktionen durch die Ungleichung von Jensen suchen und oft geht es leichter als bei der Benutzung der Differentialrechnung.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: Jensenova nerovnosť, konkávna a konvexná funkcia, maximum a minimum funkcie, A-G nerovnosť

Pri riešení mnohých extremálnych úloh najmä z matematickej olympiády na strednej škole možno využiť tvar priebehu funkcie - jej konvexnosť a konkávnosť. O túto vlastnosť funkcií sa opiera Jensenova nerovnosť. Mnohé úlohy, v ktorých sa používa, sa riešia ľahšie pomocou tejto nerovnosti ako s použitím diferenciálneho počtu. Viac informácii z matematického hľadiska môže čitateľ nájsť v [2] a [6].

Definícia. Nech f je funkcia definovaná na intervale $\langle a,b\rangle$, ktorá má túto vlastnosť: Ak sú x_1, x_2, x_3 ľubovoľné čísla z intervalu $\langle a,b\rangle$ spĺňajúce nerovnosť $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P[x_2,f(x_2)]$ pod (nad) priamkou spájajúcou body $P_1[x_1,f(x_1)]$, $P_2[x_3,f(x_3)]$. Potom hovoríme, že funkcia f je konvexná (konkávna) na intervale $\langle a,b\rangle$.

Veta 1 (Jensenova nerovnosť)**.** Nech f je funkcia definovaná na intervale $\langle a,b\rangle$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú ľubovoľné čísla z intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom platí : Ak je funkcia f

a) konvexná na intervale $\langle a,b\rangle$ tak $f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$

b) konkávna na intervale $\langle a,b\rangle$ tak $f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$.

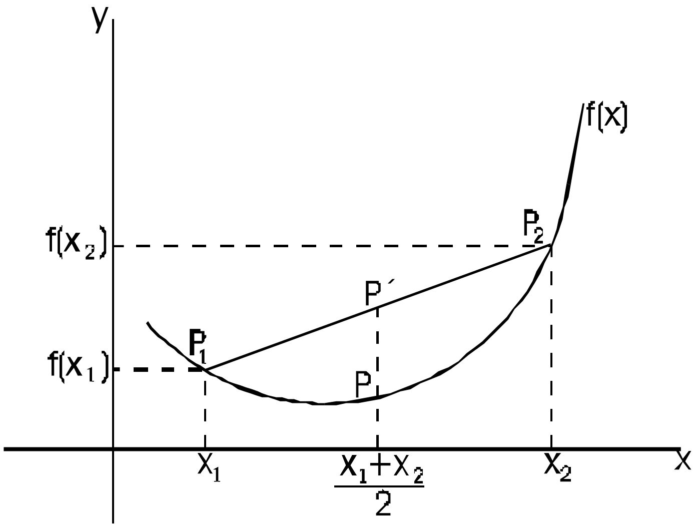
Rovnosť v oboch prípadoch nastáva, ak $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dôkaz. Dokážeme len a) časť, lebo b) časť by sa dokazovala analogicky. Dôkaz urobíme pomocou matematickej indukcie podobne ako pri Cauchyho dôkaze A-G nerovnosti.

Najprv pre $n = 2$. Nech $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$. Ak $x_1 \neq x_2$, tak bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $x_1 < x_2$. Potom platí $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2$. Označme $x_1' = x_1$, $x_2' = \frac{x_1+x_2}{2}$, $x_3' = x_2$. Ak je funkcia konvexná na intervale $\langle a,b\rangle$, potom bod $P[x_2',f(x_2')]$ leží pod priamkou spájajúcou body $P_1[x_1', f(x_1')]$, $P_2[x_3', f(x_3')]$.

Bod $P'\left[\frac{x_1+x_2}{2},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]$ je stred úsečky P_1P_2. Bod P preto leží pod bodom P′,

Obr. 1



a teda $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Ak $x_1 = x_2$, platí $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) =$

$= \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Tým je veta dokázaná pre n = 2, t. j.

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (1) .$$

Teraz predpokladajme, že veta platí pre $n = 2^k$; $k \in N$ a dokážeme, že platí aj pre $2^{k+1} = 2.2^k = 2n$. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ sú ľubovoľné čísla z intervalu $\langle a,b\rangle$. Podľa indukčného predpokladu platí

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \wedge$$

$$\wedge\ f\left(\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{2n}}{n}\right) \le \frac{f(x_{n+1})+f(x_{n+2})+\ldots+f(x_{2n})}{n}$$. Ďalej platí

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{2n}}{2n}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+\ldots+x_{2n}}{n}}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+\ldots+x_{2n}}{n}\right)}{2} \le \frac{\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}+\frac{f(x_{n+1})+\ldots+f(x_{2n})}{n}}{2} =$$

$$= \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2n})}{2n} .$$

Rovnosť nastane v prípade, že platí $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{2n}}{n} \wedge$

$\wedge\ (x_1 = x_2 = \ldots = x_n) \wedge (x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2n}) \Rightarrow x_1 = x_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} = \ldots = x_{2n}$. Tým je veta dokázaná pre $n = 2^k$.

Platnosť vety pre ostatné $n \in N$ dokážeme pomocou spätnej indukcie: Ak veta platí pre

$n \geq 2$, tak platí aj pre $n - 1$. Nech $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sú ľubovoľné čísla z intervalu $\langle a,b \rangle$. Zaveďme substitúciu $x_1^1 = x_1$, ... , $x_{n-1}^1 = x_{n-1}$, $x_n^1 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$. Aj týchto n čísel je z intervalu $\langle a,b \rangle$, a preto podľa indukčného predpokladu platí

$$f\left(\frac{x_1^1 + x_2^1 + \dots + x_n^1}{n}\right) \leq \frac{f(x_1^1) + f(x_2^1) + \dots + f(x_n^1)}{n}$$

. Po dosadení dostávame

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right)}{n}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})}{n} + \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right)}{n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) . f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})}{n}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})}{n-1}$$

Rovnosť nastane, ak $x_1^1 = x_2^1 = \dots = x_n^1 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$.

V odbornej literatúre (pozri [2] a [5]) je horeuvedená veta používaná častejšie vo všeobecnejšom tvare:

Veta 2 Nech f je funkcia definovaná na intervale $\langle a,b \rangle$ a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú ľubovoľné čísla z intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom platí : Ak je funkcia f

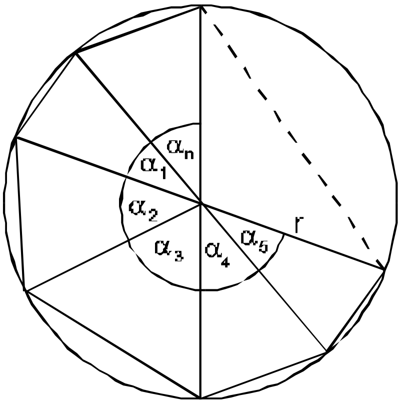
a) konvexná na intervale $\langle a,b \rangle$ tak $f\left(\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} p_i . x_i\right) \leq \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} p_i . f(x_i)$

b) konkávna na intervale $\langle a,b \rangle$ tak $f\left(\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} p_i . x_i\right) \geq . \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} p_i . f(x_i)$, pričom $p_i \in R_0^+$ a

$\sum_{i=1}^{n} p_i = P$. Rovnosť v oboch prípadoch nastáva, ak $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Príklad 1. Do kružnice vpíšte n-uholník s maximálnym obsahom, pričom $n \geq 4$.

Obr. 2



Riešenie: Rozdeľme n-uholník podľa obr. 2 na n trojuholníkov. Obsah každého z nich možno vyjadriť v tvare $\frac{1}{2} r^2 . \sin \alpha_i$, kde $i = 1,2,\dots,n$. Potom pre obsah celého n-uholníka platí: $S = \frac{1}{2} r^2 . (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n)$.

Predpokladajme,že $0 < \alpha_i < \pi$. Funkcia $y = \sin x$ je na intervale $(0 ; \pi)$ konkávna , preto podľa Jensenovej nerovnosti platí :

$$\frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \dots + \sin\alpha_n}{n} \leq \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}\right)$$

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leq n.\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right)$$

$$\frac{1}{2}r^2 . (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n) \leq \frac{1}{2}r^2 . n . \sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right)$$

V našom prípade platí : $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 2\pi$. Preto $S \leq \frac{1}{2}r^2 . n . \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Rovnosť nastáva v prípade , že $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{2\pi}{n}$. V tomto prípade sa jedná o pravidelný n-uholník. Ešte treba rozriešiť prípad , keby existovalo $\alpha_i > \pi$.

V každom prípade obsah takéhoto n-uholníka je menší ako obsah n-uholníka s maximálnym obsahom . To vyplýva z toho, že obsah n-uholníka s max. obsahom je väčší ako obsah polkruhu a obsah polkruhu je väčší ako obsah n-uholníka v ktorom existuje
$\alpha_i > \pi$.

Príklad 2 . Dokážte, že

a) pre každý ostrouhlý trojuholník platí :
$tg^2\,\alpha + tg^2\,\beta + tg^2\,\gamma \geq 9$

b) pre ľubovoľný trojuholník platí:
$\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Rovnosť nastáva v oboch prípadoch, ak trojuholník je rovnostranný.

Riešenie: a) Pomocou grafu funkcie y = tg x, môžeme načrtnúť graf funkcie y = $= tg^2\,x$. Táto funkcia je na intervale $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ konvexná a v ostrouhlom trojuholníku sú uhly práve z tohoto intervalu. Preto platí : $\frac{tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma}{3} \geq tg^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$.

Keďže $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tak dostávame $tg^2\,\alpha + tg^2\,\beta + tg^2\,\gamma \geq 3.\ tg^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3.\left(\sqrt{3}\right)^2 = 9$.

Rovnosť nastáva, ak $tg^2\,\alpha = tg^2\,\beta = tg^2\,\gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$, takže trojuholník je rovnostranný.

b) Uhly v trojuholníku sú z otvoreného intervalu $(0;\pi)$, na ktorom funkcia y = sin x nadobúda kladné funkčné hodnoty a je konkávna. Preto môžeme použiť nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (A – G nerovnosť) a potom aj Jensenovu nerovnosť:

$$\sqrt[3]{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma} \leq \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

Obe nerovnosti sú súčasne splnené v prípade, že trojuholník je rovnostranný.
Keďže v trojuholníku platí, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, dostaneme

$$\sqrt[3]{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma} \leq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Príklad 3. Nájdite minimum funkcie $f(x) = a^x + b.a^{-x}$, ak $b \in R^+$ $a \in R^+ - \{1\}$

a) pomocou A-G nerovnosti

b) pomocou Jensenovej nerovnosti

Riešenie: a) Zaveďme substitúciu $a^x = t$. Potom $f(x) = t + \frac{b}{t}$. Použijúc A-G nerovnosť dostávame

$$\frac{t+\frac{b}{t}}{2} \geq \sqrt{t.\frac{b}{t}} \Rightarrow f(x) \geq 2.\sqrt{b} \ .$$

Rovnosť nastáva v prípade $t = \frac{b}{t} \Rightarrow t^2 = b$.

Potom $t = \sqrt{b} \Rightarrow a^x = \sqrt{b} \Rightarrow x = \frac{1}{2} . \log_a b$.

b) Z grafu funkcie $y = e^x$ vyplýva, že je to konvexná funkcia. Vyjadrime funkciu f(x) v tvare $f(x) = e^{x.\ln a} + e^{-x.\ln a+\ln b}$. Z Jensenovej nerovnosti vyplýva $\frac{e^{x.\ln a} + e^{-x.\ln a+\ln b}}{2} \geq e^{\frac{x.\ln a - x.\ln a + \ln b}{2}}$

$$f(x) \geq 2 . e^{\frac{\ln b}{2}} = 2.\sqrt{b} .$$

Rovnosť nastáva v prípade , že $x.\ln a = -x.\ln a + \ln b \Rightarrow x = \frac{1}{2}.\frac{\ln b}{\ln a} = \frac{1}{2} . \log_a b$.

Príklad 4. Dokážte A-G nerovnosť pomocou Jensenovej nerovnosti

Riešenie: Využime funkciu f(x) = log x . Táto funkcia je konkávna, preto podľa Jensenovej neovnosti platí $\log\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n}{n}$

$$\log\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \log\left(x_1 . x_2 . \ldots . x_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 . x_2 . \ldots . x_n}$$

Úlohy na precvičenie:

1. Nájdite na intervale $\langle -a, a \rangle$

a) maximum funkcie $f(x) = \sqrt[n]{a+x} + \sqrt[n]{a-x}$

b) minimum funkcie $f(x) = (a + x)^n + (a - x)^n$, kde $n \in N$ a $n \geq 2$.

2. Dokážte pomocou Jensenovej nerovnosti, že pre každé $x_1, x_2, \ldots , x_n \in R^+$

platí $$\sqrt[n]{x_1 . x_2 . \ldots . x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$ (G - H nerovnosť)

Literatúra:

[1] Gunčaga J.:*Úlohy na maximum a minimum.*Diplomová práca. Bratislava, MFF UK 1997

[2] Dragomir S. S., Pećarić J., Persson L. E. : *Properties of some functionals related to Jensen´s inequality* , in : Acta Mathematica Hungarica 70 (1996), strana 129 - 143

[3] Kufner A.: *Nerovnosti a odhady*, ŠMM 39. Praha, Mladá fronta 1975

[4] Riečan B., Vaňatová L.: *Matematika pre gymnáziá 7*. Bratislava, SPN 1980
[5] Rüthing D. : *Ungleichung von Jensen*, in: Praxis der Mathematik 6/37 (1995), strana 249- 250
[6] Jensen J. L. W. V.: *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, in: Acta Math. 30 (1906), strana 175 - 193
[7] Hecht T., Sklenáriková Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. Bratislava, SPN 1992
[8] Larson C. Loren : *Problem Solving Through Problems*, Springer Verlag GmbH & GKG New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983 (slov. preklad *Metódy riešenia matematických problémov*. Bratislava, Alfa 1990)

Adresa autora: Mgr. Ján Gunčaga
katedra matematiky a fyziky PF KU
Hrabovská 1
034 01 Ružomberok
email: guncaga@ku.sk